Unità Didattica: Omotetia e similitudine in laboratorio informatico

Svolta in una classe 4° Liceo Linguistico

…la classe 4H 2006/07, a cui vanno i miei ringraziamenti
per l'interesse e l'impegno dimostrato

clelia giarratana

Nelle pagine seguenti gli studenti interessati troveranno la sequenza e il contenuto dei vari file Cabrì e Derive utilizzati per sviluppare l'UD.
Non sempre la trasposizione in Word dei file è perfetta, ma …ho fatto del mio meglio, e a voi il compito di provare personalmente a costruirli.
All'interno troverete riferimento ai testi usati come base per lo studio teorico e per le sequenze di esercizi.

L'argomento trattato viene anche volutamente utilizzato per introdurre la goniometria (che è parte del Programma dela classe IV)

Buona visione

Milano,maggio 2007

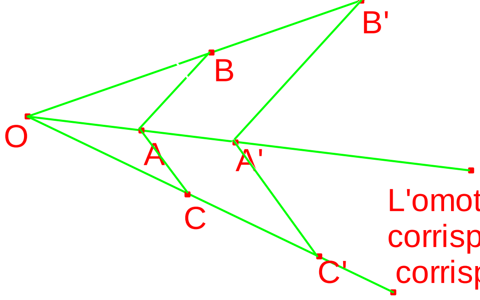
OMOTETIA

Cabri' file 1:

definizione di OMOTETIA

Due figure si dicono omotetiche se si corrispondono punto per punto in modo che le rette congiungenti due punti corrispondenti AA', BB' passano tutte per un punto fisso O=centro dell'omotetia e le cui distanze da due punti qualunque omologhi hanno rapporto costante k=rapporto di omotetia.
Se k>0 omotetia diretta; se k<0 omotetia inversa

k=OA'/OA=OB'/OB=...



L'omotetia è una particolare similitudine: le rette corrispondenti sono parallele e gli angoli corrispondenti congruenti.

N: per la definizione di trasformazioni omotetiche vedi "Geometria" Re Fraschini Grazzi ed. Atlas

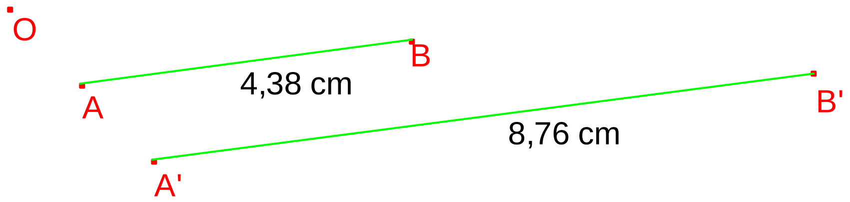
OMOTETIA

Cabri' file 2:

OMOTETIA

rapporto di omotetia=2

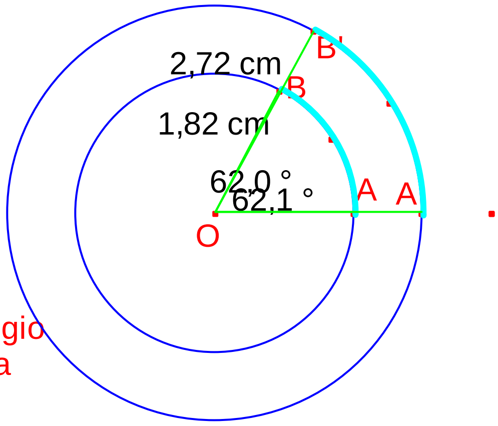
I) Esempio su segmento



OMOTETIA

Cabrì file3:
sono date due circonferenze omotetiche di centro O

II) Esempio su
circonferenza



Il rapporto tra l'arco AB e il raggio OAè congruente al rapporto tra l'arco A'B' e il raggio OA'

1 radiante è la misura di un angolo al centro che sottende un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio	xrad/2pigreco=a°/360

Esercizi

N: si utilizzano le istruzioni per la costruzione di figure omotetiche fornite da “Geometria” Re Fraschini Grazzi ed. Atlas pag 239-241

1- Costruzione di un’omotetia
2- Individuazione del centro di un’omotetia

OMOTETIA

Cabrìfile4:

MATRICE DI OMOTETIA

$$M=\begin{bmatrix} \pm k & 0 \\ 0 & \pm k \end{bmatrix}$$

con k n° reale

N: Per la teoria sulle matrici, riferirsi al testo Alecci “Matrici e trasformazioni” ed. Cedam

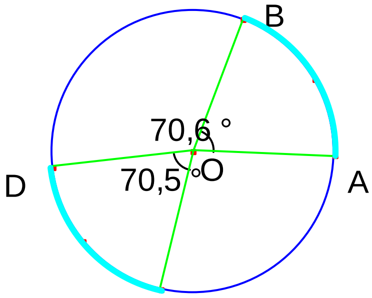
PROPORZIONALITà DIRETTA

Cabrì file5:
L'omotetia prevede una relazione di proporzionalità diretta tra segmenti omotetici (con costante di proporzionalità k). Più in generale:

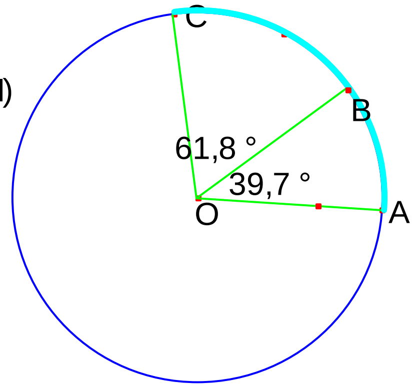
> **Criterio generale proporzionalità diretta**:
> condizione necessaria e sufficiente perchè due insiemi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che
> I) a grandezze congruenti nel 1° insieme corrispondano grandezze congruenti nel 2° insieme
> II) alla somma di 2 o più grandezze nel 1° insieme corrisponda la somma delle corrispondenti grandezze nel 2° insieme

ES: archi e angoli al centro in una circonferenza

I)



II)



Gli archi sono corrispondenti ai rispettivi angoli al centro

ampiezza AOC:
lunghezza AC=lunghAB+lunghBC

N: vedi "Geometria" Re Fraschini Grazzi ed. Atlas pag 206-208

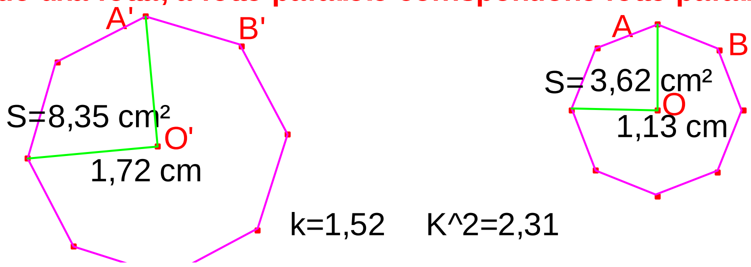
SIMILITUDINE

Cabrì file 6:

Due figure si dicono simili se si corrispondono biunivocamente in modo che, se (AA'), (BB') sono due coppie qualunque di punti corrispondenti, il rapporto k= rapporto di similitudine, k=A'B'/AB, sia costante.Se k>0 la similitudine è diretta, se k<0 è inversa.

Proprietà di figure simili:

I) gli angoli omologhi sono congruenti
II) i segmenti omologhi stanno tra loro nel rapporto k
III) le aree omologhe stanno tra loro nel rapporto k2
IV) i volumi omologhi stanno tra loro nel rapporto k3
V) si conserva l'eguaglianza della forma tra le figure omologhe; ad una retta corrisponde una retta; a rette parallele corrispondono rette parallele

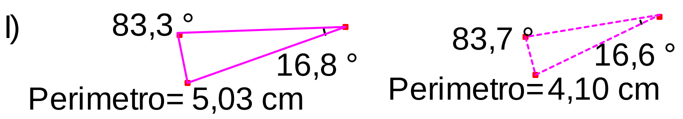


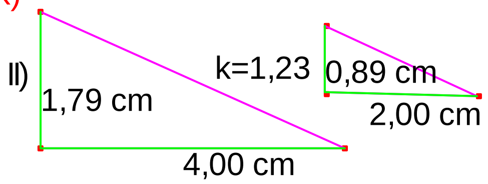
N: si utilizzano le istruzioni per la costruzione di figure simili fornite da “Geometria” Re Fraschini Grazzi ed. Atlas

SIMILITUDINE

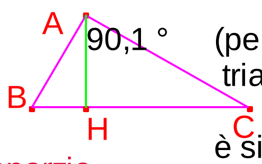
Cabrì file 7:
In particolare:

Criteri di similitudine dei triangoli:
1- Due triangoli sono simili se: hanno due angoli ordinatamente congruenti
2- hanno due lati proporzionali (nello stesso rapporto k) e l'angolo compreso congruente
3- hanno i tre lati proporzionali (nello stesso rapporto k)





Applicazioni della similitudine ai triangoli rettangoli:
1°teorema Euclide:ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa
BC/AB=AB/BH



(perchè il triangolo ABC è simile al triangolo ACH)

2°teorema Euclide: l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa BH/AH=AH/HC

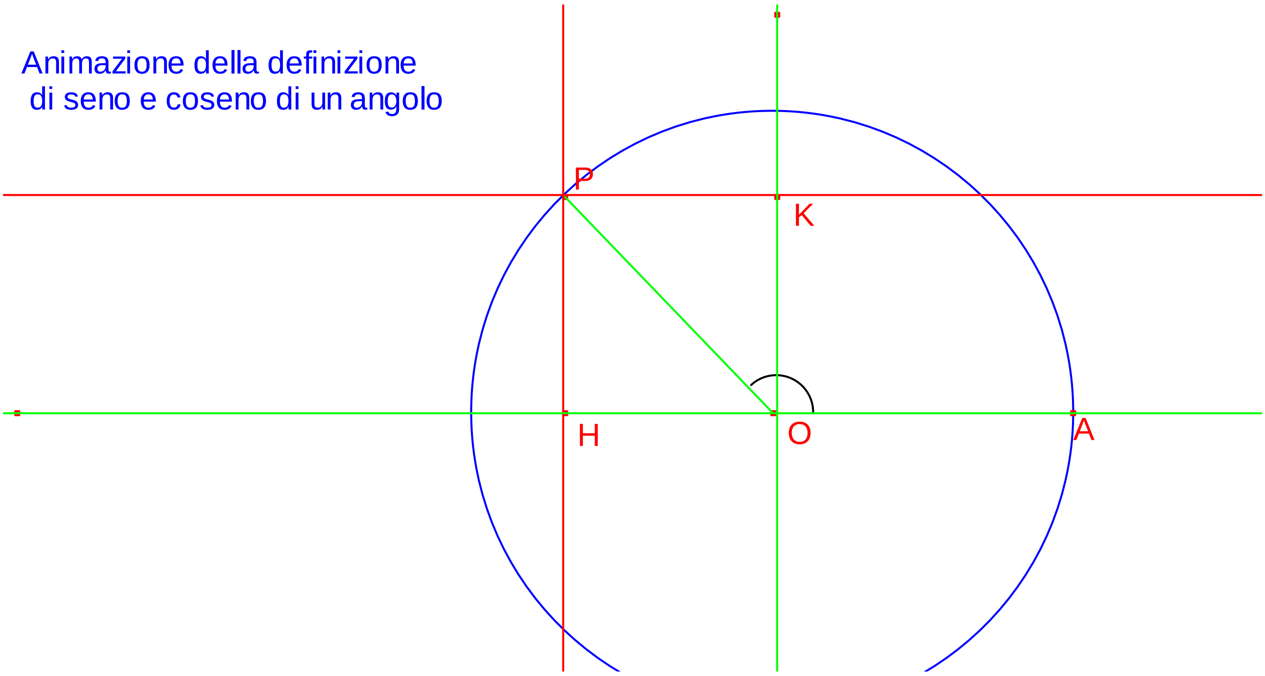
N: si utilizzano le istruzioni per la costruzione di triangoli simili fornite da “Geometria” Re Fraschini Grazzi ed. Atlas pag.257

SIMILITUDINE

Cabrì file 8:
Introducendo lo studio della goniometria:

senx=PH/OP
cosx=OH/OP

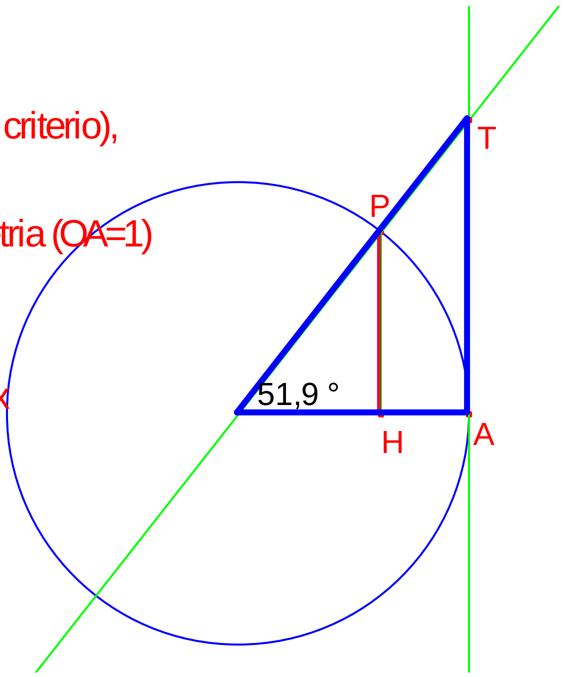
Animazione della definizione
di seno e coseno di un angolo



Applicazioni della similitudine:

i triangoli OPH e OTA sono simili (1° criterio),
quindi
TA/OA=PH/OH
ovvero, nella circonferenza goniometria (OA=1)
TA=PH/OH

tg x=senx/cosx
per le definizioni date di senx e cosx



N:("anima" P)

N: si utilizza per le definizioni di goniometria il testo “Multiformat mod.18-Trigonometria” Maraschini Palma ed. Paravia

SIMILITUDINE

Cabrì file 9:

MATRICE DI SIMILITUDINE

$$M=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

con a,b n° reali
e k= rapporto di similitudine= $\sqrt{a2+b2}$

Le similitudini sono trasformazioni geometriche risultato del prodotto di una isometria con una omotetia

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{X} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Prodotto tra matrici:

NB: è possibile eseguirlo solo se n°colonne M1=n° righe M2

Es: M1 2x3 , M2 3x2 allora (M1x M2) 2x2

Es: $M1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $M2=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $M1xM2=\begin{bmatrix} (1+4+-3) & (4+0-6) \\ (0+2+1) & (0+0+2) \end{bmatrix}$

Il prodotto tra matrici non è commutativo,
L'elemento neutro è la matrice identica,
non valgono la legge di annullamento del prodotto e della semplificazione

: $M1=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M2=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $M1xM2=\begin{bmatrix} (0+0) & (-2+0) \\ (0+2) & (0+0) \end{bmatrix}$

SIMILITUDINE

Cabrìfile10

ESERCITAZIONE: 1- costruisci un decagono regolare di lato **l** e la circonferenza ad esso circoscritta (sia di misura **r** circa=2cm)
2- costruisci il rettangolo avente per base un segmento (orizzontale) di lunghezza pari al **r**aggio e per altezza un segmento pari ad **l**.
3- costruisci sul rettangolo precedente il quadrato di lato **l**
4-verifica che la misura del rapporto **l/r** tra decagono e circonferenza e la misura del rapporto **(r-l)/l** tra parte rimanente della base e altezza del rettangolo sono uguali (**sezione aurea**)

Esercitazione: suddividi in sezioni auree successive il dipinto della Gioconda (partendo dalla dimensione della lunghezza del quadro)

N: si utilizzano le istruzioni per la costruzione di segmenti aurei fornite da “Geometria” Re Fraschini Grazzi ed. Atlas. Pag258

OMOTETIA E SIMILITUDINE

Derive file1:
Esercitazione: trasformare curve (retta, parabola e circonferenza di centro O) secondo omotetie o similitudini utilizzando le matrici di trasformazione
N: si utilizzano i comandi Derive per costruire le righe del foglio di algebra seguente

scelgo un'equazione di retta

$y = x - 1$

scrivo il vettore delle vecchie/nuove variabili e la matrice di trasformazione

$[x, y]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

effettuo la trasformazione

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot [x, y] = [x, y]$$

riscrivo l'equazione trasformata (usare Substitute variable)

$2\cdot x + y = x \wedge x - 2\cdot y = -y$

$x - 2\cdot y = 2\cdot x + y - 1$

$$\frac{1 - x}{3} = y$$

Risultato: UNA RETTA TRASFORMATA CON SIMILITUDINE è ANCORA UNA RETTA
scelgo un'equazione di parabola

$y = x^2$

riscrivo l'equazione trasformata (usare Substitute variable)

$2\cdot y - x = (x + 2\cdot y)^2$

$x - 2\cdot y = - x^2 - 4\cdot x\cdot y - 4\cdot y^2$

Risultato: UNA PARABOLA TRASFORMATA CON SIMILITUDINE PUò CAMBIARE DIREZIONE ASSE SIMMETRIA (VEDI PLOT)
scrivo una omotetia (diretta)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot [x, y] = [x, y]$$

riscrivo l'equazione trasformata (usare Substitute variable)

$$x = \frac{x}{2} \wedge y = \frac{y}{2}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x^2}{4}$$

Risultato:UNA PARABOLA TRASFORMATA CON OMOTETIA (DIRETTA) MANTIENE L'ASSE DI SIMMETRIA

scrivo una omotetia (inversa)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot [x, y] = [x, y]$$

riscrivo l'equazione trasformata (usare Substitute variable)

$$x = -\frac{x}{2} \wedge y = -\frac{y}{2}$$

$$-\frac{y}{2} = \frac{x^2}{4}$$

Risultato:UNA PARABOLA TRASFORMATA CON OMOTETIA (INVERSA) MANTIENE L'ASSE DI SIMMETRIA

scrivo una circonferenza con centro in O

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 4$$

riscrivo l'equazione trasformata (usare Substitute variable)

$$(2\cdot x + y)^2 + (-x + 2\cdot y)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{5}$$

Risultato: UNA CIRCONFERENZA TRASFORMATA CON OMOTETIA E SIMILITUDINE RESTA UNA CIRCONFERENZA

SIMILITUDINE

Derive file:

Esercitazione: trasformare curve (retta, parabola e circonferenza di centro O) secondo similitudini ottenute dal prodotto di matrici omotetia per isometria e verifica di proprietà della similitudine.

costruzione matrice similitudine come prodotto di omotetia per isometria

$$\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

rapporto di similitudine

$\sqrt{(2^2 + 0^2)}$

$\sqrt{(2^2 + 0^2)} = 2$

funzioni scelte

$y = - 3\cdot x + 1$

$y = x^2$

$y^2 + x^2 = 4$

trasformazione simile applicata alle funzioni

[x, y]

$$[x, y]\cdot \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix} = [2\cdot x, - 2\cdot y]$$

$- 2\cdot y = 1 - 6\cdot x$

$- 2\cdot y = 4\cdot x^2$

$4\cdot x^2 + 4\cdot y^2 = 4$

verifica similitudine applicata alle aree dei cerchi (πr^2)

$\pi\cdot 2^2$

$\pi\cdot 1^2$

4

verifica similitudine applicata a triangolo

$y = 3\cdot x + 1$

$y = -1$

$- 2\cdot y = 6\cdot x + 1$

$- 2\cdot y = -1$

verifica similitudine applicata a triangolo:rapporto tra le altezze preso con Center